



Sinyaller ve Sistemler

“Sinyaller ve Sistemlerin Sınıflandırılması”

Dr. Cahit Karakuş, 2020



Peryodik Sinyaller

Periodic Signals

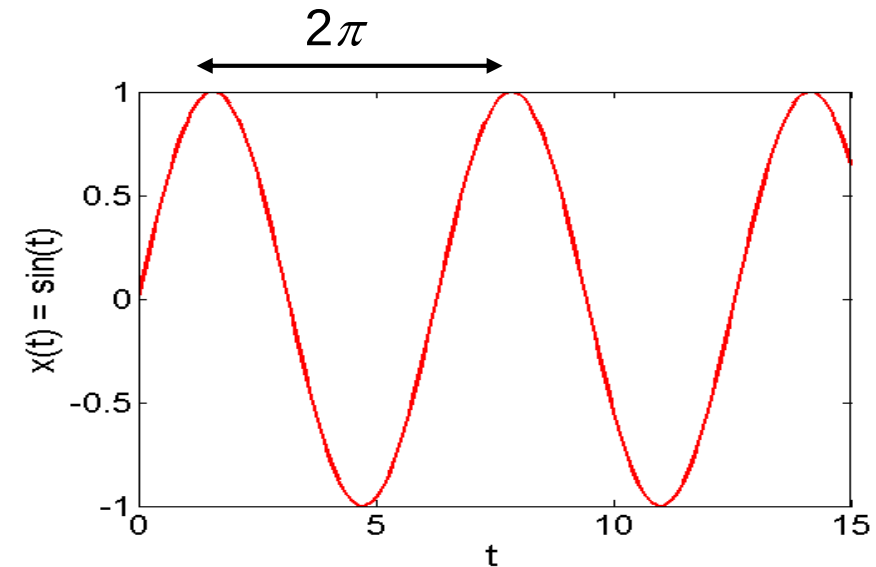
- Sinyalin, belli peryod boyunca sahip olduğu özellikler $n \cdot T$ ($n=1,2, \dots$) her peryodta sürekli tekrarlanır.
- An important class of signals is the class of periodic signals. A periodic signal is a continuous time signal $x(t)$, that has the property

- where $T > 0$, for all t .
$$x(t) = x(t + T)$$

- Examples:

- $\cos(t+2\pi) = \cos(t)$
- $\sin(t+2\pi) = \sin(t)$
- Are both periodic with period 2π

- $X(t) = X_1(t) + X_2(t)$
- $X(t+T_0) = x_1(t+m_1T_1) + x_2(t+m_2T_2)$
- $m_1T_1 = m_2T_2 = T_0 = \text{Temel (Fundamental) period}$



Periodic and Aperiodic Signals

Signals are broadly classified as

- periodic
- aperiodic (sometimes called nonperiodic)

The classification depends on whether the signals repeat or do not repeat.

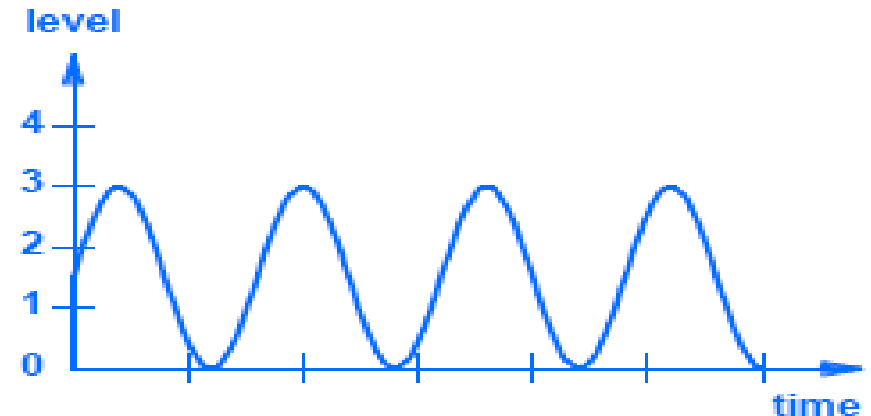
Sine Waves and Signal Characteristics

Data communications often involves the use of sinusoidal trigonometric functions:
especially sine (abbreviated **sin**)

We are interested in sine waves that correspond to a signal that oscillates in time:

Sine waves are important because:

- natural phenomena produce sine waves
- when a microphone picks up an audible tone, the output is a sine wave
- electromagnetic radiation can be represented as a sine waves



Örnek: Sinyal Peryodik mi?

- $X(t) = 5\sin(2\pi 1000t)$ peryodik sinyalmi? Eğer peryodik sinyal ise periyodu nedir?
- Evet, sinüsoidal sinyal olduğundan peryodiktir.
- Sinüsoidal sinyal, $X(t) = A\sin(\omega t + \phi)$
- Genlik, $A=5$ Birim
- Faz, $\phi=0$ derece
- $\omega=2\pi f$, $f=1000$ Hz,
- Peryod, $T=1/f = 1/1000 = 10^{-3}$ saniye = 1 milisaniye

Örnek: Karıştırılmış Sinyaller Peryodik mi?

- $X(t) = 5\sin(2\pi 1000t) + 4\cos(2\pi 5000t)$ sinyali periyodik mi, periyodik ise periyodu nedir?
- $T_1 = 1/1000\text{Hz}$
- $T_2 = 1/5000\text{Hz}$
- $m \cdot T_1 = n \cdot T_2 = T_0$, ifadesinde eşitliğini sağlayacak m ve n tam sayıları bulunabiliyorsa sinyal periyodiktir.
- $m/1000 = n/5000$
- $m = n/5$ o halde $n = 5m$; $m = 1$, ise $n = 5$ olur.
- Sinyal periyodiktir. Periyodu ise $T_0 = 1/1000$ saniye dir.

Örnek: Peryodik Sinyallerin Toplanması ve Ortak peryodun bulunması

Sum of periodic Signals may not always be periodic!

Example: $x(t) = \cos((\pi/3)t) + \sin((\pi/4)t)$

- $\omega = 2\pi f$
- $\omega_1 = \pi/3, \omega_2 = \pi/4$
- $\omega_1 = 2\pi f_1 = \pi/3$
- $\omega_2 = 2\pi f_2 = \pi/4$
- $f_1 = 1/6, f_2 = 1/8$
- $T_1 = 1/f_1 = 6; T_2 = 1/f_2 = 8;$
- $m_1 T_1 = m_2 T_2 = T_0 \rightarrow$ Find m_1 and $m_2 \rightarrow$
- $4 \times 6 = 3 \times 8 = 24 = T_0$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \cos t + \sin \sqrt{2}t$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$\omega_1 = 1, \omega_2 = \sqrt{2}$$

$$f_1 = 1/(2\pi), f_2 = \sqrt{2}/(2\pi),$$

$$T_1 = 1/f_1 = 2\pi, T_2 = (2\pi)/\sqrt{2},$$

$$m \cdot T_1 = n \cdot T_2 = T_0$$

$$m = n/\sqrt{2} = T_0$$

Bu eşitliği sağlayan m, n tamsayı değerleri yoktur. $\sqrt{2}$ is an irrational number

- $X(t)$ is aperiodic

Örnek

- $X(t)=5 + \sin(2\pi 10t)$, sinyal periyodik mi? Evet, çünkü sinüsoidal sinyalin genliği +5 sabit katsayısı kadar yukarı ötelenir.
- $X(t)=\exp(5t) + \sin(2\pi 10t)$, Evet sinyalin periyodu değil biçimi değişir.
- Periyod olup olmadığını belirlememiz için sinüsoidal sinyallere bakılır.

Composite Signals

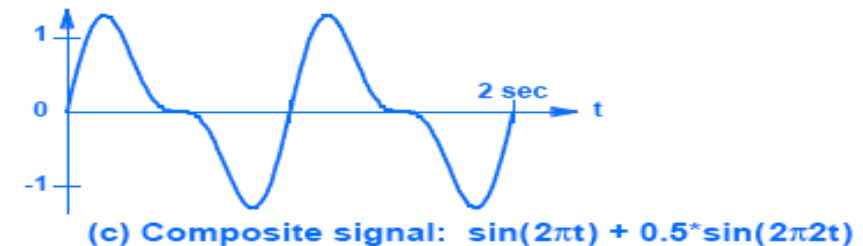
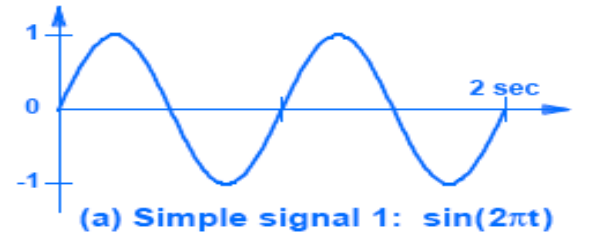
Signals like the ones illustrated in this figure are classified as **simple**:

...because they consist of a single sine wave that cannot be decomposed further.

Most signals are classified as **composite**:

...because the signal can be...

- decomposed into a set of simple sine waves
- formed by adding two simple sine waves



The Importance of Composite Signals and Sine Functions

Q: Why does data communications (*not Computer Networking*) seem obsessed with sine functions and composite signals?

A1: Signals that result from modulation are usually composite signals

A2: The mathematician Fourier discovered that it is possible to decompose a composite signal into its constituent parts into a set of sine functions, each with a frequency, amplitude, and phase.

Time and Frequency Domain Representations

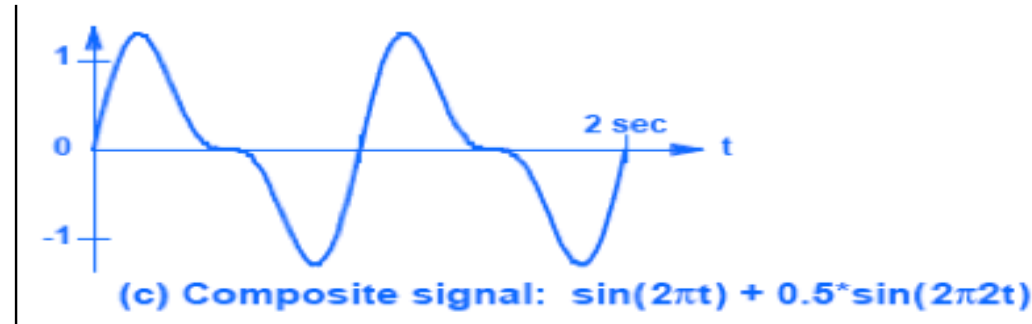
Two key methods are used to represent composite signals:

1) Time Domain Representation -- A graph of a signal as a function of time

2) Frequency Domain Representation -- A graph of a signal made up of every simple frequency included. The y-axis gives the amplitude, and the x-axis gives the frequency.

Example: The function $a\sin(2\pi t)$ is represented by a single line of height a that is positioned at $x = t$

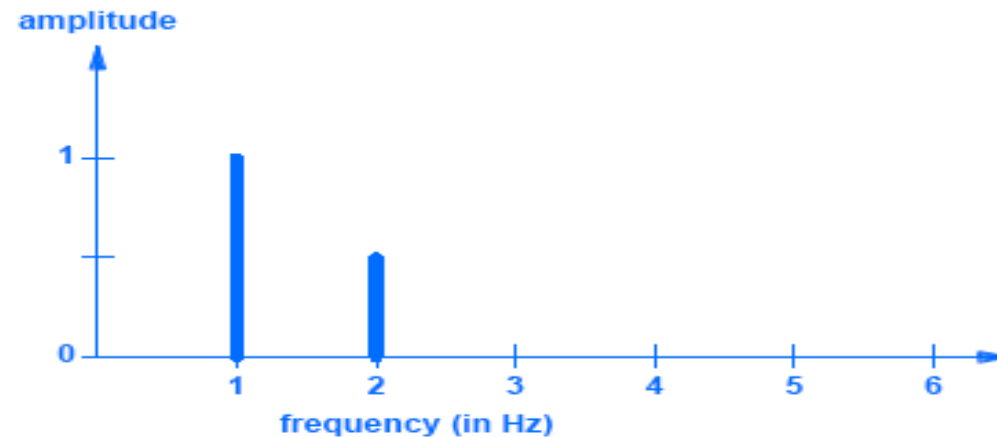
Time Domain Representation



Frequency Domain Representation

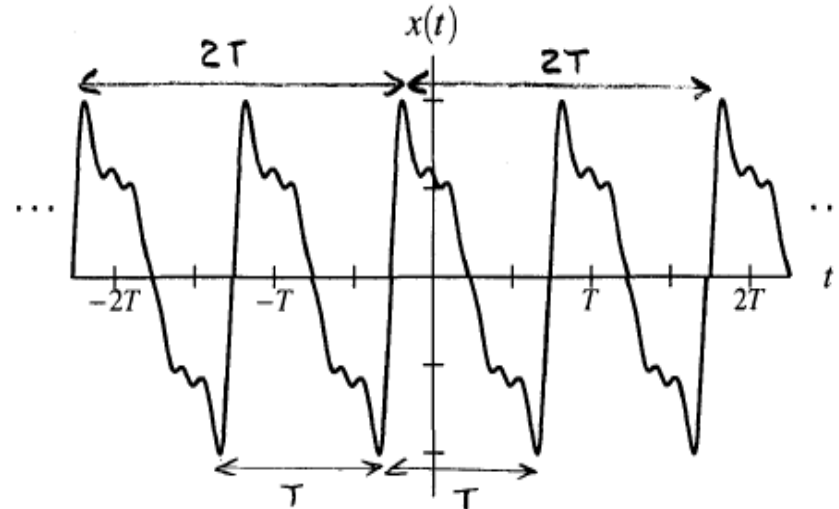
Advantages of the Frequency Domain Representation:

- It can be used with nonperiodic signals
- It is compact



Peryodik Sinyaller

- Periyodik bir sinyalin periyodu tek değildir. Yani, T periyoduyla periyodik olan bir sinyal, her (kesin olarak) pozitif tamsayı k için ayrıca kT periyodu ile periyodiktir.
- Bir sinyalin periyodik olduğu en küçük periyot temel periyot, karşılık gelen frekansına ise temel frekans denir.
- $T=1/f$, T : temel periyod (saniye), f : frekans ($\text{Hz}=1/\text{saniye}$)

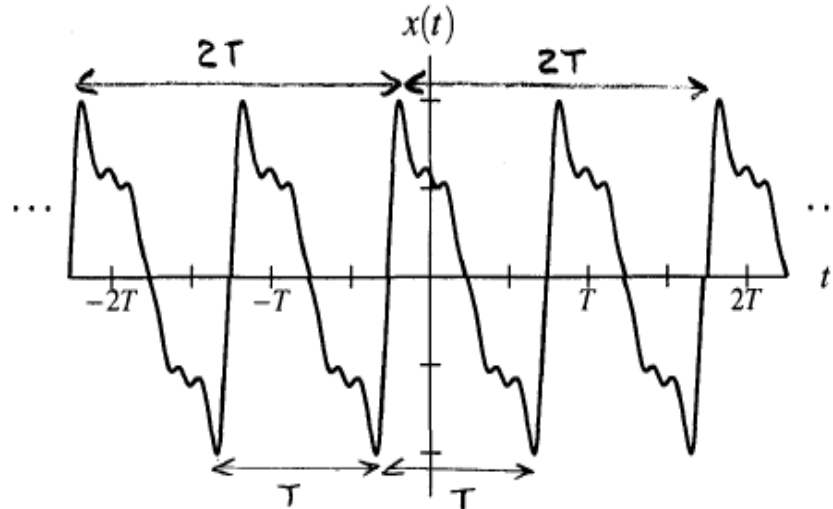


Sürekli Peryodik Sinyaller

- Bazı kesin pozitif gerçek sabit T değeri için $x(t) = x(t + T)$ ifadesinde tüm t değerleri için koşul geçerliyse, x fonksiyonunun periyodik T (veya T periyodik) ile periyodik olduğu söylenir:
- Bir T -periyodik fonksiyona sahip olan sinyal, x 'in frekansı $1/T$ ve açısal frekansı $2\pi/T$ olduğu söylenir.

Sürekli sinyaller (fonksiyon):

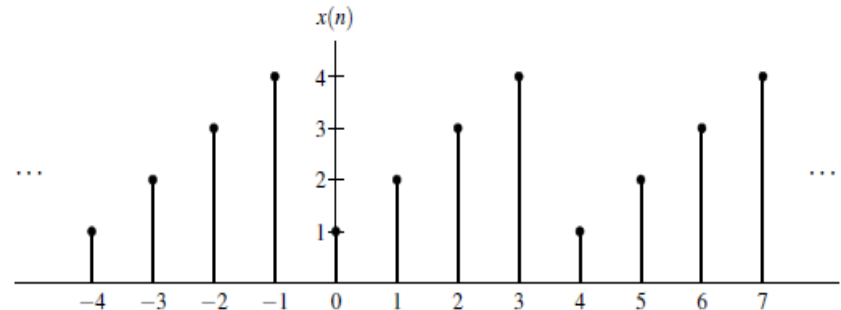
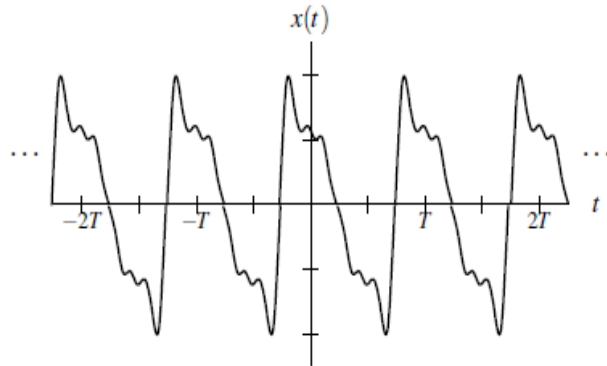
- $x(t) = A \sin(\omega t + \theta)$ analog sinyalinde, genlik= A , Açısal frekans= $\omega = 2\pi f$, frekans= $f = 1/T$, θ =faz açısı
- $x(t) = 5 \sin(2\pi 1000t + 30)$ analog sinyalinde, genlik=5birim, Açısal frekans= $\omega = 2\pi 1000$ rad, frekans= $f = 1/T = 1000$ Hz, $T = 1/1000$ sec, θ =faz açısı=30 derece



Ayrık Peryodik Sinyaller

Ayrık sinyaller (Dizi):

- Bazı kesin pozitif tamsayı sabitleri N için aşağıdaki koşul geçerliyse, x dizisinin periyodik N (veya N -periyodik) ile periyodik olduğu söylenir:
- $x(n) = x(n + N)$ tümü n için.
- Bir N -periyodik sekans x 'in $1/N$ frekansına ve $2\pi/N$ açısal frekansına sahip olduğu söylenir.
- Periyodik olmayan bir fonksiyonun ya da dizinin periyodik olmadığı söylenir.



Important Condition of Periodicity for Discrete Time Signals

- A discrete time signal is periodic if $x(n) = x(n+N)$
- For satisfying the above condition the frequency of the discrete time signal should be ratio of two integers, $f = k/N$
- For non-periodic signals $x(t) \neq x(t+T_o)$
- A non-periodic signal is assumed to have a period $T = \infty$

Örnek: Sum of periodic Signals

- $f(t) = \sin(5\pi t) + \sin(9\pi t)$ sinyalin peryodu nedir?
- $\sin(at) + \sin(bt)$ ifadesinin peryodunu bulmak için a/b bölümünün rasyonel (iki tam sayının birbirine oranı ile ifade edilebilen sayılar) bir sayı olması gerekir.
- $\omega_1 = 2\pi/T_1 = 5\pi$; $T_1 = 2/5$
- $\omega_2 = 2\pi/T_2 = 9\pi$, $T_2 = 2/9$
- $mT_1 = nT_2$ (?)
- $n=9$, $m=5$

Uygulamalar

Determine whether the following signals are periodic and justify. If the signal is periodic, find the fundamental period.

(a) $x(t) = e^t \cos(\pi t + 1) + 4$

(b) $x(t) = \frac{e^{-j\omega t} + e^{j\omega t}}{2}$

(c) $x[n] = \sin(\frac{\pi}{2}n) \cos(n + 1)$

(d) $x[n] = \sin^2(\frac{3\pi}{2}n) + \sin(\frac{3\pi}{4}n)$

- $\sin(n\pi)$: periyodik.
- $\sin(n+1)$: Periyodik sinyal değildir. π yoktur.

Solution:

(a) Not periodic due to e^t .

(b) Periodic because $x(t) = \cos(\omega t)$, and the fundamental period is $\frac{2\pi}{\omega}$.

(c) Not periodic since $\cos(n + 1)$ is not periodic.

(d) Periodic because $\sin^2(\frac{3\pi}{2}n)$ and $\sin(\frac{3\pi}{4}n)$ are both periodic. The fundamental periods of $\sin^2(\frac{3\pi}{2}n)$ and $\sin(\frac{3\pi}{4}n)$ are 2 and 8, so the fundamental period of $x[n]$ is 8.



Energy Signal and Power Signal

Power and Energy

$f(t)$ sinyalindeki anlık güç şu şekilde tanımlanır:

$$P_{inst} = f^2(t)$$

Sinyal genellikle voltaj veya akım ile temsil edildiğinden, karşılık gelen birimler volt'un karesinin ortalaması ile amper'in karesinin ortalaması olacaktır. (Watt değil).

Küçük δt zaman aralığındaki enerji, $f^2(t)\delta t$

Tüm zamanların toplam enerjisi: $E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt$

Ortalama güç:

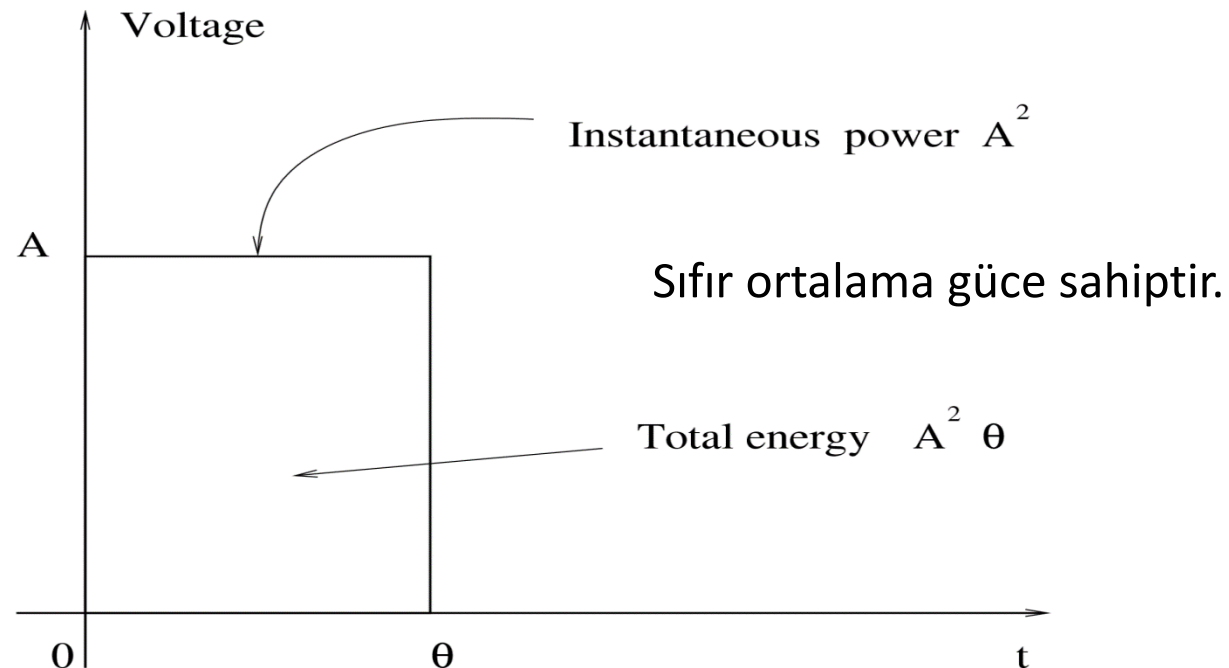
$$P = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f^2(t)dt$$

Example: Aşağıdaki şekilde gösterilen A yüksekliği ve θ genişliğindeki dikdörtgen darbenin anlık gücü vardır.

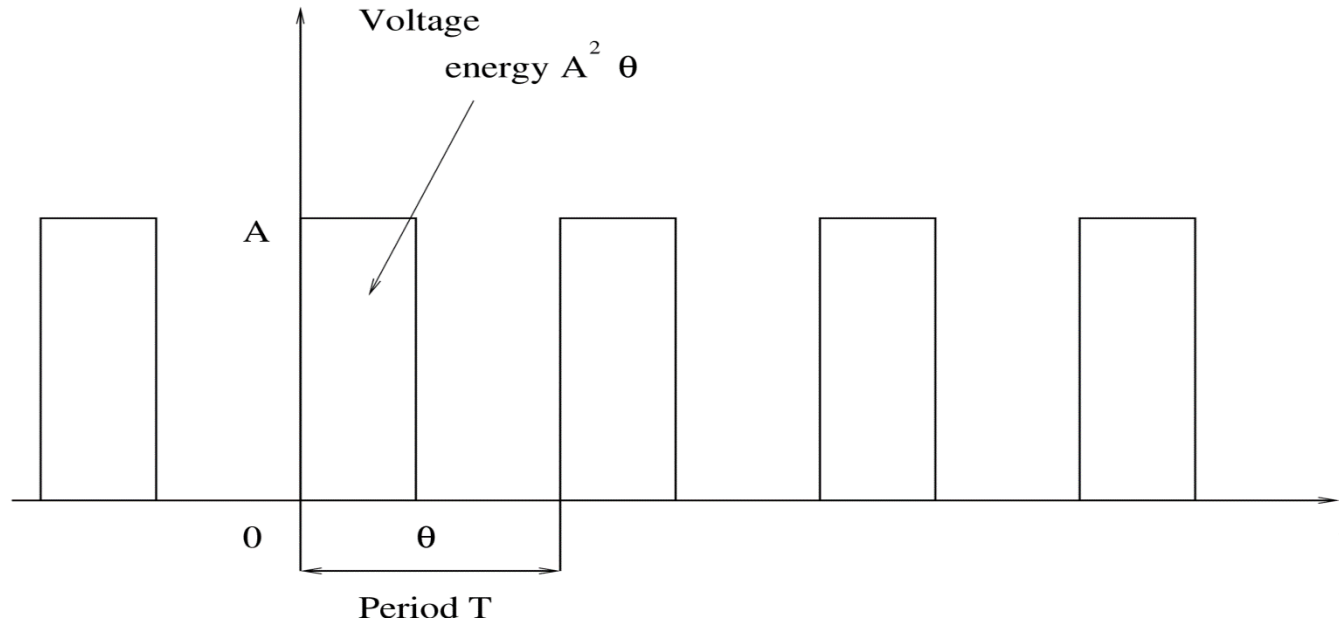
$$P_{inst} = A^2 \text{ for } 0 \leq t \leq \theta$$

and energy $E = A^2 \theta$

- Ortalama güç nedir; Güç, birim zamandaki enerji olduğundan; ortalama güç, her zaman normalize edilen tüm enerjidir.
- Sonuç, sonlu bir enerji sinyalinin her zaman sıfır ortalama güce sahip olmasıdır.



Example: Repetitive pulses



Örnekteki sinyal (tekrarlayan darbeler) sonlu bir ortalama güç sinyalidir.

Güç enerjisi açısından sinyal türleri:

- 1) Geçici sinyaller: sonlu enerji, sıfır ortalama güç, genellikle sonlu bir süre sürer
- 2) Sürekli sinyaller: sonlu ortalama güç ama sonsuz enerji, tüm zamanlar için geçerlidir

Mean power is

$$P = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f^2(t) dt$$

So the pulses have finite mean power

$$P = \frac{A^2 \theta}{T}$$

Electrical Signal Energy & Power

- Sinyalleri enerji ve güç gibi ölçütlerle karakterize etmek genellikle yararlıdır.
- Örneğin, bir direncin anlık gücü:

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{1}{R} v^2(t)$$

- and the **total energy** expanded over the interval $[t_1, t_2]$ is:

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R} v^2(t)dt$$

- and the **average energy** is:

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R} v^2(t)dt$$

- Bu kavramlar herhangi bir sürekli veya ayrık zaman sinyali için nasıl tanımlanır?

Energy and Power

- **Total energy** of a continuous signal $x(t)$ over $[t_1, t_2]$ is:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

- where $|\cdot|$ denote the magnitude of the (complex) number.
- Similarly for a discrete time signal $x[n]$ over $[n_1, n_2]$:

$$E = \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

- By dividing the quantities by (t_2-t_1) and (n_2-n_1+1) , respectively, gives the **average power, P** .
- Note that these are similar to the electrical analogies (voltage), but they are different, both value and dimension.

Energy and Power over Infinite Time

- Birçok sinyal için, gücü ve enerjiyi sonsuz bir zaman aralığında $(-\infty, \infty)$ incelemekle ilgileniyoruz. Bu nedenle bu miktarlar şu şekilde tanımlanır:

$$E_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$E_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

- Toplamlar veya integraller yaklaşmazsa, böyle bir sinyalin enerjisi sonsuzdur.

$$P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

$$P_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$$

- İki önemli (alt) sinyal sınıfı:
 - Sonlu toplam enerji (ve dolayısıyla sıfır ortalama güç)
 - Sonlu ortalama güç (ve dolayısıyla sonsuz toplam enerji)
- Sonsuz zaman boyunca sinyal analizi, tümü sınırlama davranışlarına bağlıdır.

Energy Signals

- Sonlu enerjiye ve sıfır güce sahip bir sinyale enerji sinyali denir, yani enerji sinyali için
- $0 < E < \infty$ and $P = 0$
- Bir sinyalin sinyal enerjisi, sinyalin büyüklüğünün karesinin altındaki alan olarak tanımlanır.

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

- Sinyal enerjisinin birimleri, sinyalin birimine bağlıdır.

Power Signals

- Bazı sinyaller sonsuz sinyal enerjisine sahiptir. Bu durumda ortalama sinyal gücüyle uğraşmak daha uygundur.
- For power signals, $0 < P < \infty$ and $E = \infty$
- Sinyalin ortalama gücü aşağıdaki denklem ile verilir

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

Örnek:

Let us consider a signal

$$x(t) = e^{-t} u(t).$$

The energy of this signal is

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-t} u(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = -\frac{1}{2} e^{-2t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}.$$

The signal $x(t)$ is an energy signal. Since E is finite the signal power $P = 0$.

Örnek:

Let us consider a complex signal

$$x(t) = Ae^{j\omega_0 t}.$$

Signal $x(t)$ is periodic with period $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$; hence, it cannot be an energy signal.

To compute the signal power we use (12.3)

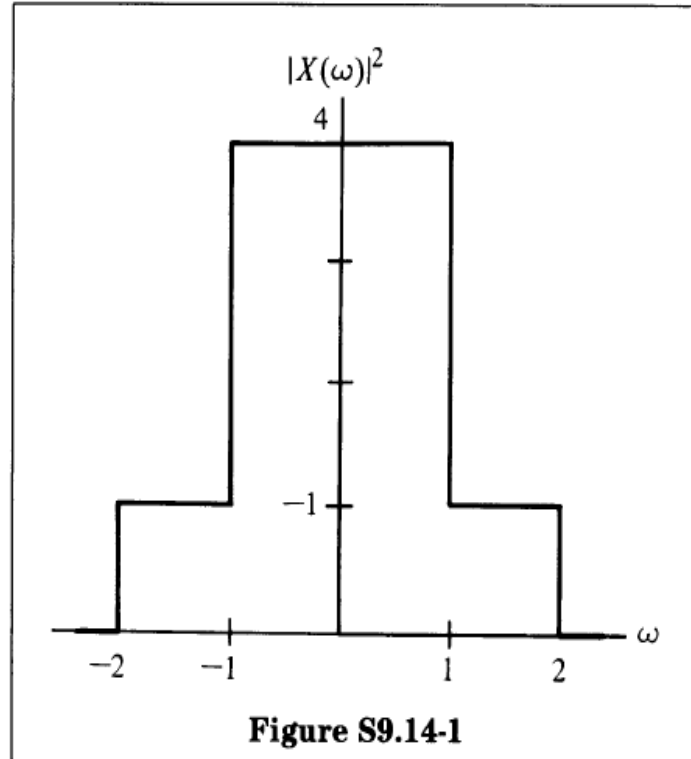
$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |Ae^{j\omega_0 t}|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A^2 dt = A^2.$$

Since P is finite, $x(t)$ is a power signal and its energy is infinite.

Örnek:

$$\text{Energy} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

$$\text{Enerji} = \frac{1}{2\pi} * \text{Alan}$$



$$\begin{aligned} \text{Area} &= (4)(2) + (2)(1)(1) \\ &= 10 \\ \text{Energy} &= \frac{5}{\pi} \end{aligned}$$

Uygulama

Determine the total energy and average power of the following signals.

$$x(t) = \begin{cases} 2, & -3 \leq t \leq 3 \\ 5 - t, & 3 \leq t \leq 5 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Power:
$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{t=-T}^T |x(t)|^2 dt.$$

Since T is large enough, we have,

$$\begin{aligned} P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \frac{80}{3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Energy:
$$\begin{aligned} E &= \int_{t=-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{t=-3}^3 |x(t)|^2 dt + \int_{t=3}^5 |x(t)|^2 dt \\ &= \int_{t=-3}^3 (2)^2 dt + \int_{t=3}^5 (5-t)^2 dt = \int_{t=-3}^3 4 dt + \int_{t=3}^5 (25 + t^2 - 10t) dt \\ &= (4t) \Big|_{t=-3}^3 + \left(25t + \frac{1}{3}t^3 - 5t^2 \right) \Big|_{t=3}^5 \\ &= (4(3) - 4(-3)) + \left(25(5-3) + \frac{1}{3}(5^3 - 3^3) - 5(5^2 - 3^2) \right) \\ &= 24 + \left(50 + \frac{98}{3} - 80 \right) = 24 + \frac{8}{3} = \frac{80}{3} \end{aligned}$$

Uygulama

$$x(t) = \cos(t) \sin(t) = \frac{1}{2} \sin(2t)$$

Energy

$$\begin{aligned} E &= \int_{t=-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} \sin^2(2t) dt \\ &= \int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos(4t)) dt = \frac{1}{8} \int_{t=-\infty}^{\infty} (1 - \cos(4t)) dt \\ &= \infty \end{aligned}$$

Power:

$$\begin{aligned} P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{t=-T}^T |x(t)|^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{t=-T}^T \frac{1}{8} (1 - \cos(4t)) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{16T} \int_{t=-T}^T (1 - \cos(4t)) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{16T} \cdot \left(t - \frac{1}{4} \sin(4t) \right) \Big|_{t=-T}^T \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{16T} \cdot (2T - \frac{1}{2} \sin(4T)) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{8} - \frac{\sin(4T)}{32T} \\ &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$



Sinyaller ve Sistemlerin Sınıflandırılması

Sistemlerin (Sinyallerin) ve Sistemlerin Sınıflandırılması

Sistemler ya da sinyaller aşağıdaki kategorilere ayrılmıştır:

- Doğrusal ve Doğrusal Olmayan
- Zaman Değişken ve Zamanla Değişmeyen
- Statik ve Dinamik
- Bellekli ve belleksiz
- Nedensel ve Nedensel Olmayan
- Ters Çevrilebilir ve Ters Çevrilebilir Olmayan
- Kararlı ve Kararsız

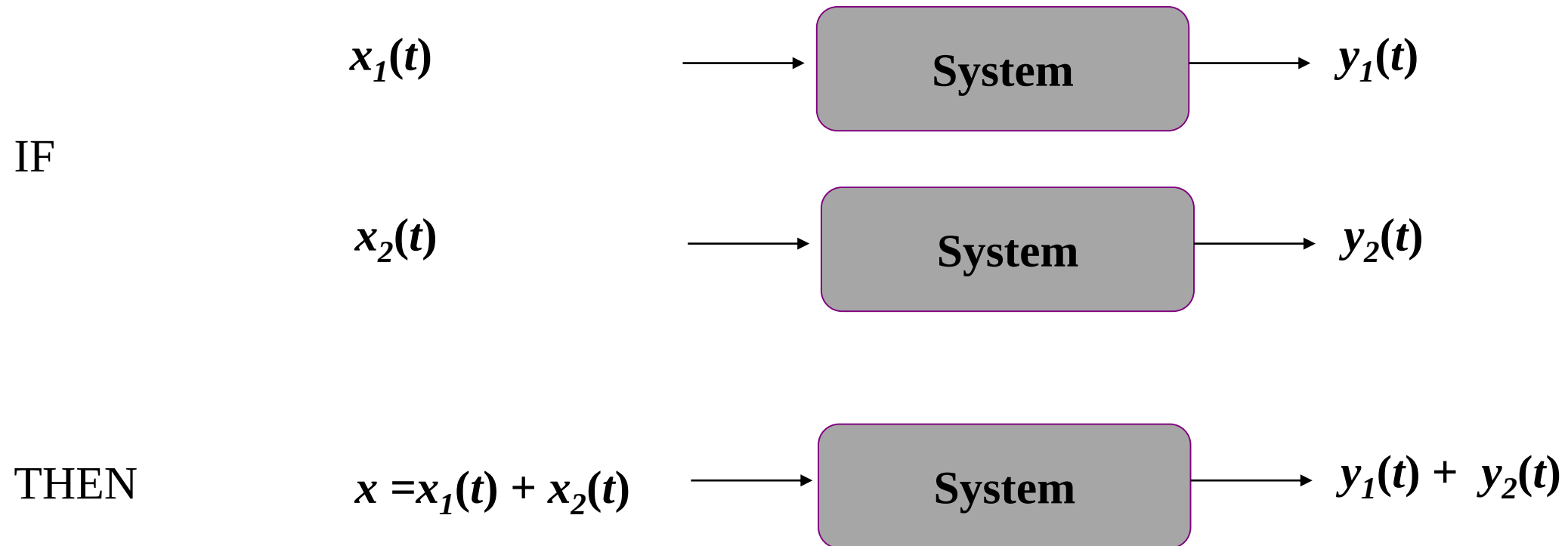
1. Doğrusal (Lineer) ve Doğrusal Olmayan Sistemler ve Sinyaller

Lineer Sistemler ve Sinyaller

- Sinyallerin ve Sistemlerin lineer olabilmesi için iki koşulun sağlanması gerekir:
- Koşul-1: Toplama Özelliği
- Koşul-2: Homojenlik özelliği

Sürekli Lineer Sistemlerde, Additivity

Linearity: Lineer sistemlerde 1. adım



Sürekli Lineer Sistemlerde, Homogeneity

Homogeneity- Lineer sistemlerde 2. adım

IF

$$ax_1(t)$$



System



$$ay_1(t)$$

THEN

$$bx_2(t)$$



System



$$by_2(t)$$

THEN

$$x = ax_1(t) + bx_2(t)$$



System



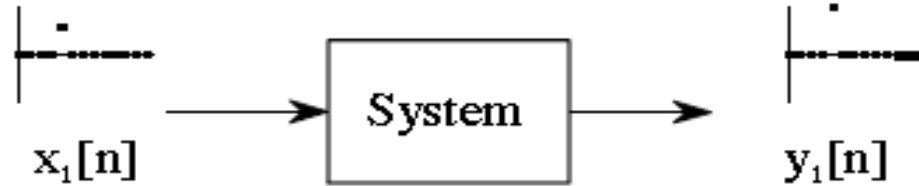
$$ay_1(t) + by_2(t)$$

Where a, b is a constant

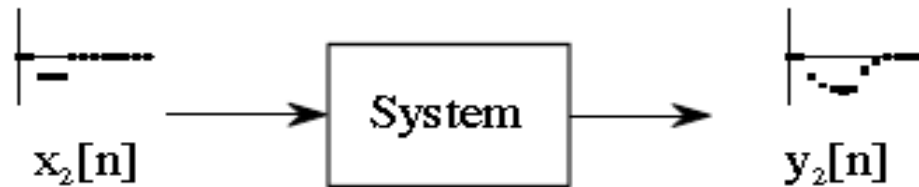
Ayrık Lineer Sistemlerde: Toplama and Homojenlik

Additivity

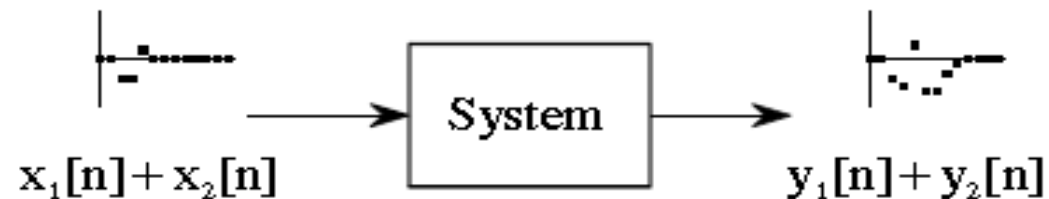
IF



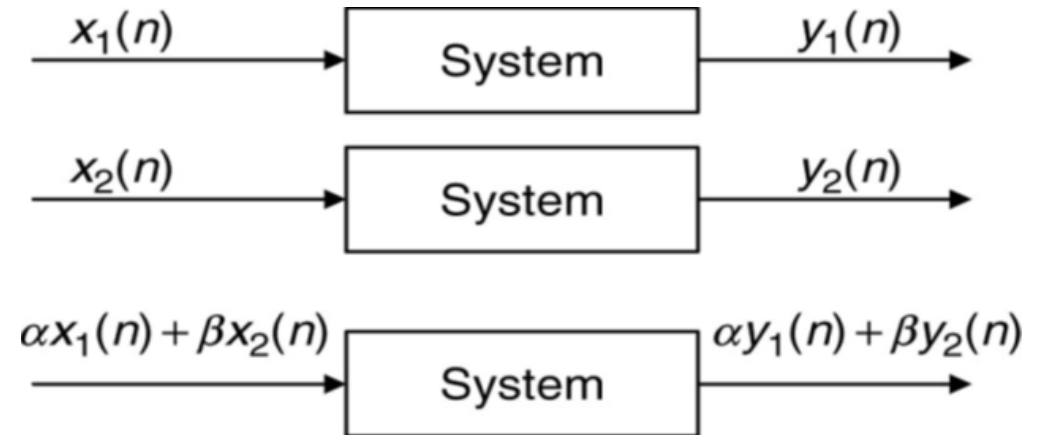
AND IF



THEN



Homogeneity & Additivity (superposition principle)



Linearity

A function $f(x)$ is a linear function of the independent variable x if, and only if, it satisfies two properties.

1. *Additivity (or superposition)* $x = x_1 + x_2$

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

for all x_1 and x_2 in the domain of $f(x)$.

2. *Homogeneity*

$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

for all x in the domain of $f(x)$ and all scalars α .

Örnek: Aşağıda verilen sistem lineer mi?

$$f(x) = 2x, \quad x \in \mathbf{R} \text{ (All real numbers)}$$
$$f(x_1) = 2x_1$$
$$f(x_2) = 2x_2$$

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) &= 2(x_1 + x_2) = 2x_1 + 2x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) &= 2x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

So,

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \rightarrow \text{(satisfies additivity)}$$

Now consider

$$\begin{aligned} f(\alpha x) &= 2(\alpha x) = 2\alpha x \\ \alpha f(x) &= \alpha(2x) = 2\alpha x \end{aligned}$$

So,

$$f(\alpha x) = \alpha f(x) \rightarrow \text{(satisfies homogeneity)}$$

Thus, the system is linear.

$$f(x_1) = 2x_1 + 9$$

$$f(x_2) = 2x_2 + 9$$

$$x = x_1 + x_2$$

$$f(x) = 2x + 9, \quad x \in \mathbf{R}$$

$$f(x_1 + x_2) = 2(x_1 + x_2) + 9 = 2x_1 + 2x_2 + 9$$

$$f(x_1) + f(x_2) = (2x_1 + 9) + (2x_2 + 9) = 2x_1 + 2x_2 + 18$$

So,

$$f(x_1 + x_2) \neq f(x_1) + f(x_2) \rightarrow \text{(does not satisfy additivity)}$$

Consider,

$$f(\alpha x) = 2(\alpha x) + 9$$

$$x = \alpha x$$

$$\alpha f(x) = \alpha(2x + 9) = 2\alpha x + 9\alpha$$

So,

$$f(\alpha x) \neq \alpha f(x) \rightarrow \text{(does not satisfy homogeneity)}$$

Thus, the system is not linear.

$$f(x) = x^2 + x$$

$$\begin{aligned}f(x_1 + x_2) &= (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_1 + x_2 \\f(x_1) + f(x_2) &= x_1^2 + x_1 + x_2^2 + x_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2\end{aligned}$$

So,

$$f(x_1 + x_2) \neq f(x_1) + f(x_2) \rightarrow \text{(does not satisfy additivity)}$$

Consider,

$$\begin{aligned}f(\alpha x) &= (\alpha x)^2 + (\alpha x) = \alpha^2 x^2 + \alpha x \\ \alpha f(x) &= \alpha(x^2 + x) = \alpha x^2 + \alpha x\end{aligned}$$

So,

$$f(\alpha x) \neq \alpha f(x) \rightarrow \text{(does not satisfy homogeneity)}$$

Thus, the system is not linear.

Linearity

Examples: Are each of the following systems **linear**?

1. $y(t) = A x(t)$
2. $y(t) = A x(t) + B, B \neq 0$
3. $y[n] = n x[n]$
4. $y(t) = x(t) \cos(\omega_c t)$
5. $y[n] = x[-n]$
6. $y(t) = x^2(t - 1)$
7. $y[n] = \frac{1}{1 - x[n+2]}$
8. $y(t) = e^{3x(t)}$

Ans: Y, N, Y, Y, Y, N, N, N

2. Nedensellik

Sinyallerde ve Sistemlerde Nedensellik

Causality

Sürekli Sinyaller: $x(t) = 0$ for $t < 0$

Ayrık Sinyaller: $x[n] = 0$ for $n < 0$

$y(t)=x(t-3)-x(t)/3$, nedensel

$y(n)=n x(n)$, nedensel

$y(t)=e^{x(t)}$, nedensel

$y(t) = x(t + 1)$, nedensel değil

$y(t) = x(5-t)$, nedensel değil. ($t=0$ değerinde $x(5)$ gelecekteki değer olmaktadır.)

$y(t) = x(-5-t)$, nedensel. ($t=0$ değerinde $x(-5)$ geçmişteki değer olmaktadır.)

Sistemin herhangi bir zamandaki çıktısı, Girişin; mevcut zamandakine, veya geçmişte girdi değerlerine, veya mevcut zamanla birlikte geçmişteki girdi değerlerine bağlıysa, bu sistem nedenseldir. Katsayılar göz önüne alınmaz. Fonksiyona bakılır.

- **Test etmek için fonksiyon içinde $t=0$ ya da $n=0$ yapılır. Katsayılar dokunulmaz. Fonksiyonun içeriği ya 0 ya da negatif olacak.**

Diğer bir anlatımla eğer bir sistemin çıkışı, şu anki girişi dâhil olmak üzere önceki değerlerine bağlı ise sisteme nedensel (causal) sistem denir. Tüm gerçek zamanlı fiziksel sistemler nedenseldir; çünkü zaman sadece ileriye akar.

Causality

Examples: Are each of the following systems **causal**?

1. $y(t) = A x(t)$
2. $y(t) = A x(t) + B, B \neq 0$
3. $y[n] = (n + 1) x[n]$
4. $y(t) = x(t) \cos(\omega_c(t + 1))$
5. $y[n] = x[-n]$
6. $y[n] = \frac{1}{3} (x[n + 1] + x[n] + x[n - 1])$
7. $y[n] = \frac{1}{1 - x[n + 2]}$
8. $y(t) = e^{3x(t)}$

Ayrık dizilerde parentez içindeki ifadede :

n: şu anki zaman

n-a: geçmiş zaman

n+a: gelecek zaman

Ans: Y, Y, Y, N, Y, N, N, Y

Sürekli fonksiyonlarda parentez içindeki:

t: şu anki zaman, t=0 alınarak,

t-a: geçmiş zaman

t+a: gelecek zaman

Sistemin matematiksel modeli ya da fonksiyonundaki ifadelerde parantez içindeki t=0 alınarak test edilir.

Soru 3'de parantez içindeki zaman ifadesi belirleyicidir. (n+1), katsayıdır.

Örnekler

Örnek: $y(t) = x(t-3) - x(t)/3$

$y(t)$, $x(t)$ 'nin şu anki ve “ $t-3$ ” anındaki değerine bağlı olduğu için nedenseldir.

Örnek: $y(n) = n x(n)$

$y(n)$, şu anki n ve $x(n)$ değerine bağlıdır. Nedensel.

Örnek: $y(t) = e^{x(t)}$, nedensel sistemdir.

Örnek: $y(t) = x(t+1)$ Nedensel olmayan sistemdir.

Örnek: $y(n) = x(n) + n x(n+1)$, şu anki ve gelecekteki değerlerine bağlıdır; nedensel değil.

Örnek: $h(t) = e^{-t}u(t)$, şu anki değerlere bağlı nedenseldir.

Örnekler

Örnek: $y(n) - 1/4y(n-1) - 3/8y(n-2) = -x(n) + 2x(n-1)$, sistem nedenseldir.

Örnek: $y(t) = x(t-2) + x(2-t)$, sistem nedenseldir.

Örnek: $y(t) = dx(t)/dt$, Sistem nedenseldir.

Örnek: $y(t) = x(t/3)$, sistem nedensel değildir. Çünkü, $t=-3$ alındığında, $y(-3)=x(-1)$; -1 değeri -3 değerine göre gelecektir.

Örnek: $y(t)=\cos(x(t))$, nedenseldir.

Örnek

- Nedensel bir sistem, çıktının geleceğe değil, girdinin şimdiki veya geçmiş değerlerine bağlı olduğu sistemdir.
- Eğer gelecek değerlere bağlıysa o zaman nedensel değildir.
- $y(t)=x(t)+x(t-3)+x(t^2)$, $y(n)=x(n+2)$ ve $y(n)=x(2n^2)$ için çıktı şunlara bağlıdır: gelecekteki değerler yani sırasıyla $x(t^2)$, $x(n+2)$ ve $x(2n^2)$.
- Oysa $y(t)=x(t-1)+x(t-2)$ 'de $y(t)$ çıkışı yalnızca geçmiş değerlere bağlıdır, yani $x(t-1)$ ve $x(t-2)$.



3. Bellekli – Belleksiz Sinyaller ve Sistemler

Memoryless System and Signals

Bir sistemin çıkışı ya da bir sinyalin fonksiyonu, girişin sadece o andaki değerine bağlı ise bu sisteme ya da sinyale belleksiz denir. Bir sistemin çıkışı ya da sinyal fonksiyonu, girişin önceki ve/veya sonraki değerlerine bağlı ise bu sisteme ya da sinyale bellekli denir. Gecikme, öteleme sinyalin girişi ile ilgili olmadığı durumlar için sistem belleksizdir. Çünkü zamanda gecikme ya da öteleme sinyalin girişi değildir.

$$y(t) = ax^2(t) + bx(t), \text{ Belleksiz}$$

$$u[n] = \sum_{n=-\infty}^n \delta[n], \text{ Belleksiz}$$

$$y(t) = x^2(t + 1), \text{ bellekli}$$

$$y(t + 1) = x^2(t + 1), \text{ belleksiz}$$

Bellek

- Bellek, yalnızca giriş ve çıkış sinyalleri aynı bağımsız değişkene sahip olan sistemlerle ilgili bir özelliktir.
- Bağımsız değişkenin her bir değeri için çıktısı yalnızca bağımsız değişkenin o değerindeki giriş sinyaline bağlıysa, sistemin hafızasız olduğu söylenir.
- Örneğin, tanımlı sistem: $y(t) = 5x(t)$; $y(t)$, $x(t)$ giriş sinyaline karşılık gelen çıkış sinyalidir, hafızasızdır.
- Fiziksel dünyada bir direnç hafızasız bir sistem olarak düşünülebilir (voltaj giriş sinyali, akım çıkış sinyali olarak kabul edilir). Tanım olarak, bu özelliğe sahip olmayan bir sistemin belleğe sahip olduğu söylenir.
- Bir sistemin hafızası olup olmadığını nasıl anlarız? Hafızasız bir sistem için, girişi herhangi bir anda değiştirmek, çıkışı yalnızca o anda değiştirebilir. Bazı durumlarda, bir anda giriş sinyalindeki bir değişiklik, çıkışı başka bir anda değiştirirse, sistemin belleğe sahip olduğundan emin olabiliriz.
- Not: Çıkışı $Y(t)$ şu şekilde $X(t)$ girişine bağlı olan bir sistemi düşünün: $Y(t) = X(t-5) + \{X(t) - X(t-5)\}$. İlk bakışta, sistemin hafızası varmış gibi görünebilir ama yoktur. Bu bizi, bir sistemin tanımı verildiğinde, bunun en ekonomik olanı olmasına gerek olmadığı fikrine götürür.
- Aynı sistemin birden fazla açıklaması olabilir. Örnekler: $Y[n]$ ve $y(t)$ 'nin sırasıyla $x[n]$ ve $x(t)$ giriş sinyallerine karşılık gelen çıktılar olduğunu varsayalım.
 - $y(t) = x(t)$ kimlik sistemi elbette Hafızasızdır
 - $y[n] = x[n-5]$ tanımlı sistem hafızaya sahiptir. Herhangi bir "an" daki giriş, önceki giriş 5 "anlarına" bağlıdır.
 - Açıklamalı aşağıdaki sistem ayrıca belleğe sahiptir. Herhangi bir andaki çıktı, tüm geçmiş ve şimdiki girdilere bağlıdır.

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda$$

Memory

Examples: Do each of the following systems have **memory**?

1. $y(t) = A x(t)$

2. $y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

3. $y[n] = n x[n]$

4. $y(t) = x(t) \cos(\omega_c(t - 1))$

5. $y[n] = x[-n]$

6. $y(t) = a_0 + a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + a_3 x^3(t) \dots$

7. $y[n] = \frac{1}{3} (x[n] + x[n - 1] + x[n - 2])$

8. $y(t) = e^{3x(t)}$

Ans: N, Y, N, Y, Y, N, Y, N

4. Time-invariance: Zamanda Öteleme

Zamanda Öteleme

Time-invariance: Zamanda ötelendiğinde fonksiyonun görünümü değişmez. $X(t)=A\sin(\omega t+\phi)$
Zamanda ötelenir.

IF

$x_1(t)$



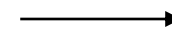
System



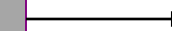
$y_1(t)$

THEN

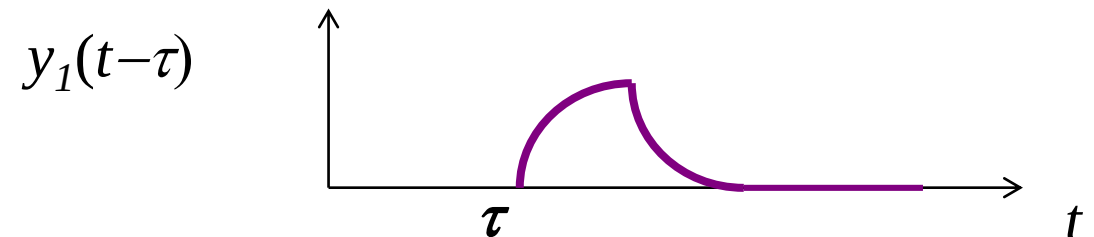
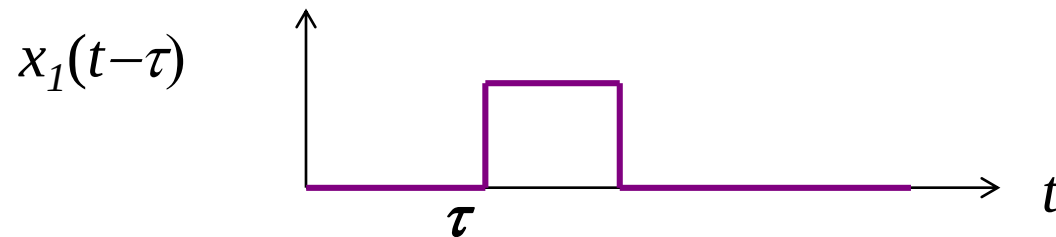
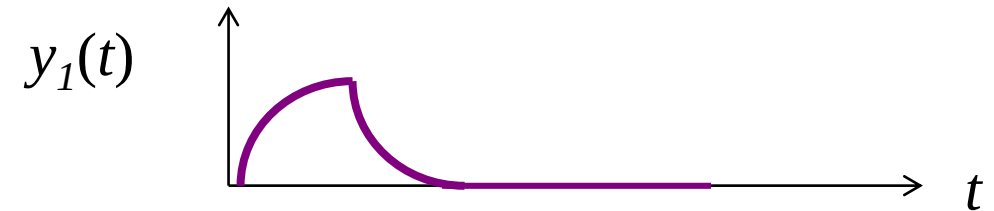
$x_1(t-\tau)$



System



$y_1(t-\tau)$



Time-invariance: Discrete signals

IF

$x_1[n]$



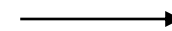
System



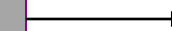
$y_1[n]$

THEN

$x_1[n - m]$

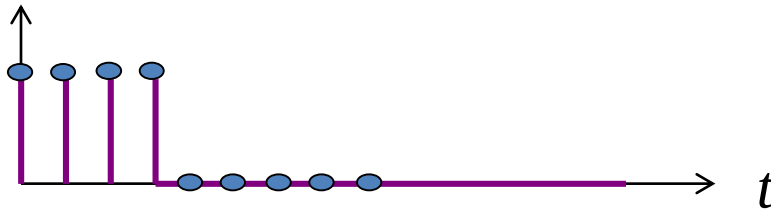


System

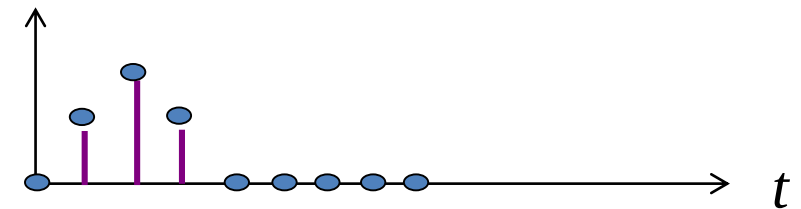


$y_1[n - m]$

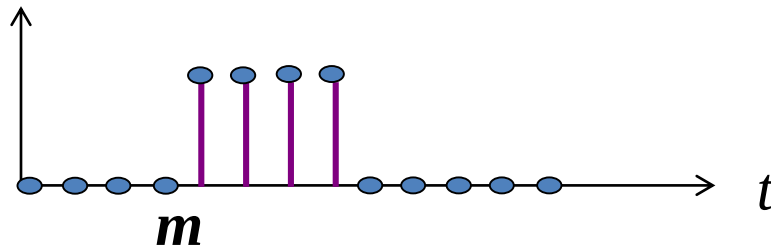
$x_1[n]$



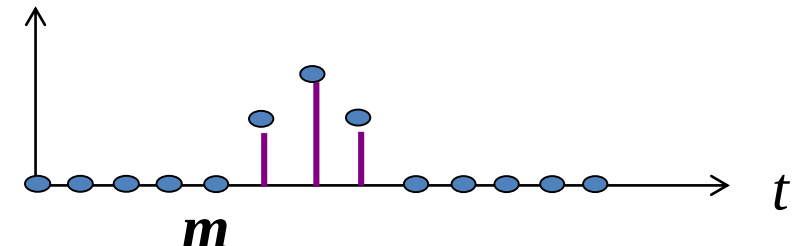
$y_1[n]$



$x_1[n - m]$



$y_1[n - m]$



5. *Kararlılık*

Kararlı Sistemler

Stability

The output of a stable system settles back to the quiescent state (e.g., zero) when the input is removed.

Kararlı bir sistemin çıktısı, giriş çıkarıldığında başlangıç durumuna geri döner (örneğin, giriş sıfırlandığında). Motor çalışırken elektrik kapanıp açılırsa başlangıç durumlarına dönmek zorunda...

The output of an unstable system continues, often with exponential growth, for an indefinite period when the input is removed.

Dengesiz bir sistemin çıktısı, giriş çıkarıldığında belirsiz bir süre boyunca, genellikle üssel büyüme ile devam eder.

Stable & Unstable Systems

- A system is said to be *bounded-input bounded-output stable* (BIBO stable) if every bounded input results in a bounded output.

Her sınırlandırılmış giriş, sınırlanmış bir çıktı ile sonuçlanıyorsa; bir sistemin sınırlanmış girişine göre sınırlanmış çıkışının kararlı (BIBO kararlı) olduğu söylenir.

$$\forall t \quad |x(t)| \leq M_x < \infty \rightarrow \forall t \quad |y(t)| \leq M_y < \infty$$

Example: The system represented by

$$y(t) = A x(t) \text{ is unstable ; } A > 1$$

Reason: let us assume $x(t) = u(t)$, then at every instant $u(t)$ will keep on multiplying with A and hence it will not be bounded.

Types of Systems based on stability

- Absolutely stable system
- Conditionally stable system
- Marginally stable system

Continuous-Time Condition for BIBO Stability

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \, dt < \infty$$

This is to say that the impulse response is **absolutely integrable**.

Discrete-Time Condition for BIBO Stability

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Bir sistemin kararlı olup olmadığına karar vermek için sistem fonksiyonunun Limit sonsuza giden değerine bakılır. Değer sonsuz gidiyorsa kararsızdır.

Which of the following systems is stable or not?

a) $y(t) = \log(x(t))$, unstable

b) $y(t) = \sin(x(t))$, stable

c) $y(t) = \exp(x(t))$, unstable

d) $y(t) = tx(t) + 1$, unsatable

$$\text{Örnek: } e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Is the system $h(t) = \exp(-t)$ stable?, stable

Comment on the stability of the following system, $y[n] = (x[n-1])^n$. Enflasyon eğilimi n olarak sınırlı bir girdimiz olsa bile sınırlı bir çıktımız olacaktır. Bu nedenle, sistem kararlı bir sistem olmaya karar verir.

Comment on the stability of the following system, $y[n] = n \cdot x[n-1]$. sınırlı bir girişimiz olsa bile, sınırsız bir çıkışımız olacaktır. Bu nedenle, sistem kararsız bir sistem olmaya karar verir.

6. Tersine Çevrilebilir Sistemler

Tersine Çevrilebilir Sistemler

- Bir sistemin girdisi çıktısından öğrenilebiliyorsa tersine çevrilebilir olduğu söylenir. Geri beslemeli sistemlerden bahsedilir. Akıllı sistemlerdir.
- Bir sistem birkaç giriş için aynı çıkışlara sahipse, çıkış birçok giriş için aynı olduğundan doğru girişi bulmak imkansızdır. Bu nedenle, bir sistem farklı girdilere farklı çıktılar verirse tersine çevrilebilir. Birçok giriş için aynı çıkış verirse ters çevrilemez.
- Seçenek a'da herhangi bir giriş için 0 çıkış üretir → Ters çevrilemez
- Seçenek b'de farklı girişler için farklı çıkışlar üretir ve ters sistemi $x[n] = (1/2) y[n]$ → Tersine çevrilebilir
- Seçenek c'de, hem pozitif hem de negatif değerler için aynı çıktıyı alıyoruz → Tersine çevrilemez
- Seçenek d, tüm sabit giriş değerleri için 0 alırız → Tersine çevrilemez.

a) $y[n] = 0$

b) $y[n] = 2x[n]$

c) $y(t) = x^2(t)$

d) $y(t) = dx(t)/dt$

Sistemlerin Sınıflandırılması

Model Classification

- Deterministic - Probabilistic models
- Static - Dynamic models
- Linear - Non-linear models
- Open - Closed models
- Kaotik Sistemler

Discrete or Continuous models

- **Discrete model:** the state variables change only at a countable number of points in time. These points in time are the ones at which the event occurs/change in state.
- **Continuous:** the state variables change in a continuous way, and not abruptly from one state to another (infinite number of states).

Dinamik - Statik Sistemler

- Statik sistemler, belleğe sahip olmayan sistemlerdir.
- Dinamik sistemler, belleğe sahip olan sistemlerdir.
- Çıkış sinyali giriş sinyalinin geçmiş değerlerine bağlıysa ve aynı zamanda dinamik sistem olarak adlandırılırsa, sistemin belleğe sahip olduğu söylenir.

Static or Dynamic models

- **Dynamic:** State variables change over time (System Dynamics, Discrete Event, Agent-Based, Econometrics?)
- **Static:** Snapshot at a single point in time (Monte Carlo simulation, optimization models, etc.)

Static and Dynamic Systems

Static system is memory-less whereas dynamic system is a memory system.

Example 1: $y(t) = 2 x(t)$

For present value $t=0$, the system output is $y(0) = 2x(0)$.

Here, the output is only dependent upon present input.

Hence the system is memory less or static.

Example 2: $y(t) = 2 x(t) + 3 x(t-3)$

For present value $t=0$, the system output is $y(0) = 2x(0) + 3x(-3)$.

Here $x(-3)$ is past value for the present input for which the system requires memory to get this output.

Hence, the system is a dynamic system.

Deterministic and Random signal

- A signal is **deterministic** whose future values can be predicted accurately.
- Example: $x(t) = A \sin t$
- A signal is **random** whose future values can NOT be predicted with complete accuracy
- Random signals whose future values can be statistically determined based on the past values are **correlated signals**.
- Random signals whose future values can NOT be statistically determined from past values are **uncorrelated signals** and are more random than correlated signals.

Deterministic and Random signal(contd...)

- Two ways to describe the randomness of the signal are:
- **Entropy:**
This is the natural meaning and mostly used in system performance measurement.
- **Correlation:**
This is useful in signal processing by directly using correlation functions.

Deterministik

- Deterministik bir sistem, sistemin gelecekteki durumlarının gelişmesinde rastgelelik bulunmayan bir sistemdir.
- Belli bir girişe hep aynı çıkışı verir, içinde olasılık bulunmaz.
- Deterministik sistemlerde, başlangıçtaki durum kesin olarak biliniyorsa, böyle bir sistemin gelecekteki durumu teorik olarak ön görülebilir. Ancak pratikte gelecekteki durumlar hakkındaki bilgi sınırlıdır.
- Deterministik modeller, sistemin gelecek durumlarının belirlenmesinde hiçbir rastgelelik olmayan sistemlerdir.
- İyi modellenmiş bir deterministik sistem için, aynı şartlar altında ve aynı başlangıç durumları için sistem her zaman aynı sonucu verir.
- Örneğin, 100 metre yukarıdan bırakacağımız bir cisim, kaç kez tekrarlırsak tekrarlayalım 4,5 saniyede yere düşecektir ve yere düştüğü andaki hızı da 44,1 m/s olacaktır.

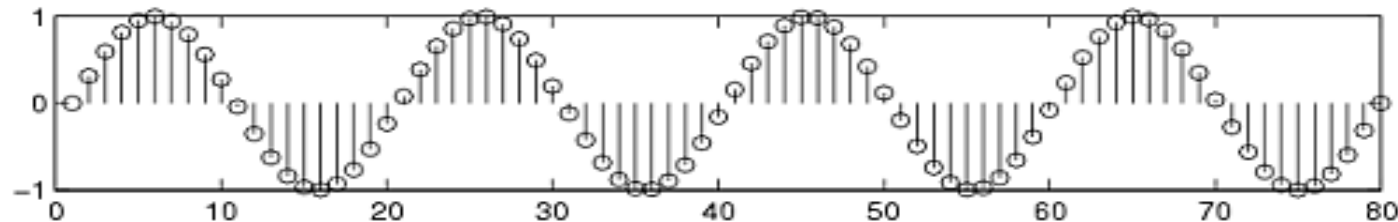
Deterministik Sistemler

- **Deterministik bir sistem, sistemin gelecekteki durumlarının gelişmesinde rastgelelik bulunmayan bir sistemdir.** Belli bir girişe hep aynı çıkışı verir, içinde olasılık bulunmaz. Eğer başlangıçtaki durum kesin olarak biliniyorsa, böyle bir sistemin gelecekteki durumu teorik olarak ön görülebilir, ancak pratikte gelecekteki durumlar hakkındaki bilgi sınırlıdır.
- Deterministik modeller, sistemin gelecek durumlarının belirlenmesinde hiçbir rastgelelik olmayan sistemlerdir. Yani iyi modellenmiş bir deterministik sistem için, aynı şartlar altında ve aynı başlangıç durumları için sistem her zaman aynı sonucu verecektir. Örneğin, 100 metre yukarıdan bırakacağımız bir cismi, kaç kez bırakırsak bırakalım 4,5 saniyede yere düşecektir ve yere düştüğü andaki hızı da 44,1 m/s olacaktır. İve ile hızlanma söz konusudur.

Deterministic & Non Deterministic Signals

Deterministic signals

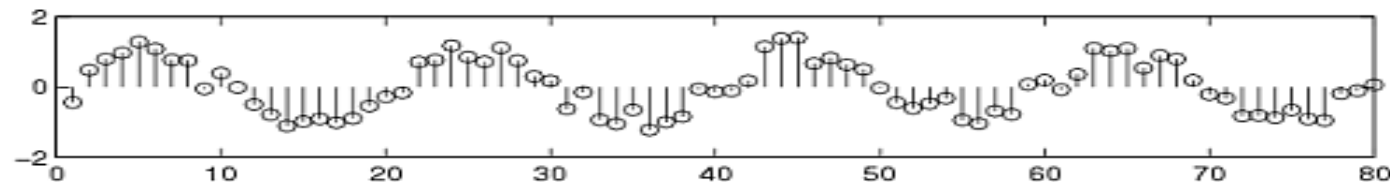
- Behavior of the signals is predictable w.r.t time
- There is no uncertainty with respect to its value at any time.
- These signals can be expressed mathematically.
For example $x(t) = \sin(3t)$ is deterministic signal.



Deterministic & Non Deterministic Signals Contd.

Non Deterministic or Random signals

- Behavior of the signals is **random** i.e. not predictable w.r.t time.
- There is an uncertainty with respect to its value at any time.
- These signals can't be expressed mathematically.
- For example **Thermal Noise** generated is non deterministic signal.



Stokastik modeller

- Stokastik modellerdeki sistem parametrelerinde, rasgelelik sistemin dinamiğinde ya da girişlerinde olabilir. Dolayısıyla sistemin çıkışı da benzer şekilde bir rastgeleliğe sahip olacaktır.
- Stokastik sistemlerde aynı şartlar altında aynı deney defalarca tekrarlanırsa dahi aynı sonuçlar elde edilmeyebilir ancak sonuçların hangi aralıkta veya hangi dağılımda olacağı, hangi sonucun ortaya çıkma ihtimalinin ne olduğu hesaplanabilir.
- Stokastik modellerde sistemin çıkışının bilinmesi yerine tahmin edilmesi ve olasılıklandırılması söz konusudur.
- Loto çekilişi, zar atılışı, döviz kurları, borsa gibi sistemleri örnek olarak verebiliriz.
- Kestirim ve öngöründe bulunulur.
- Makine Öğrenmesi Algoritmalarında veri yığından öğrenerek insandan bağımsız otonom davranış geliştiren algoritmalar ve matematiksel modellerden belirli olasılık hesaplamaları ile gerçek hayattaki uygulamalara yönelik sistemler geliştirilmektedir. Bununla bu sistemler stokastik sistemlerdir.

Deterministic, Stochastic or Chaotic

- **Deterministic model** is one whose behavior is entire predictable. The system is perfectly understood, then it is possible to predict precisely what will happen.
- **Stochastic model** is one whose behavior cannot be entirely predicted.
- **Chaotic model** is a deterministic model with a behavior that cannot be entirely predicted

Deterministic and Stochastic Models

- Deterministic models produce deterministic results
- Stochastic or probabilistic models are subject to random effects
 - Typically, they have one or more random inputs (e.g., arrival of customers, service time etc.).
 - Outputs from stochastic models are “estimates” of the true characteristics of the system
 - Need to repeat experiments number of times
 - Need to have confidence in the results

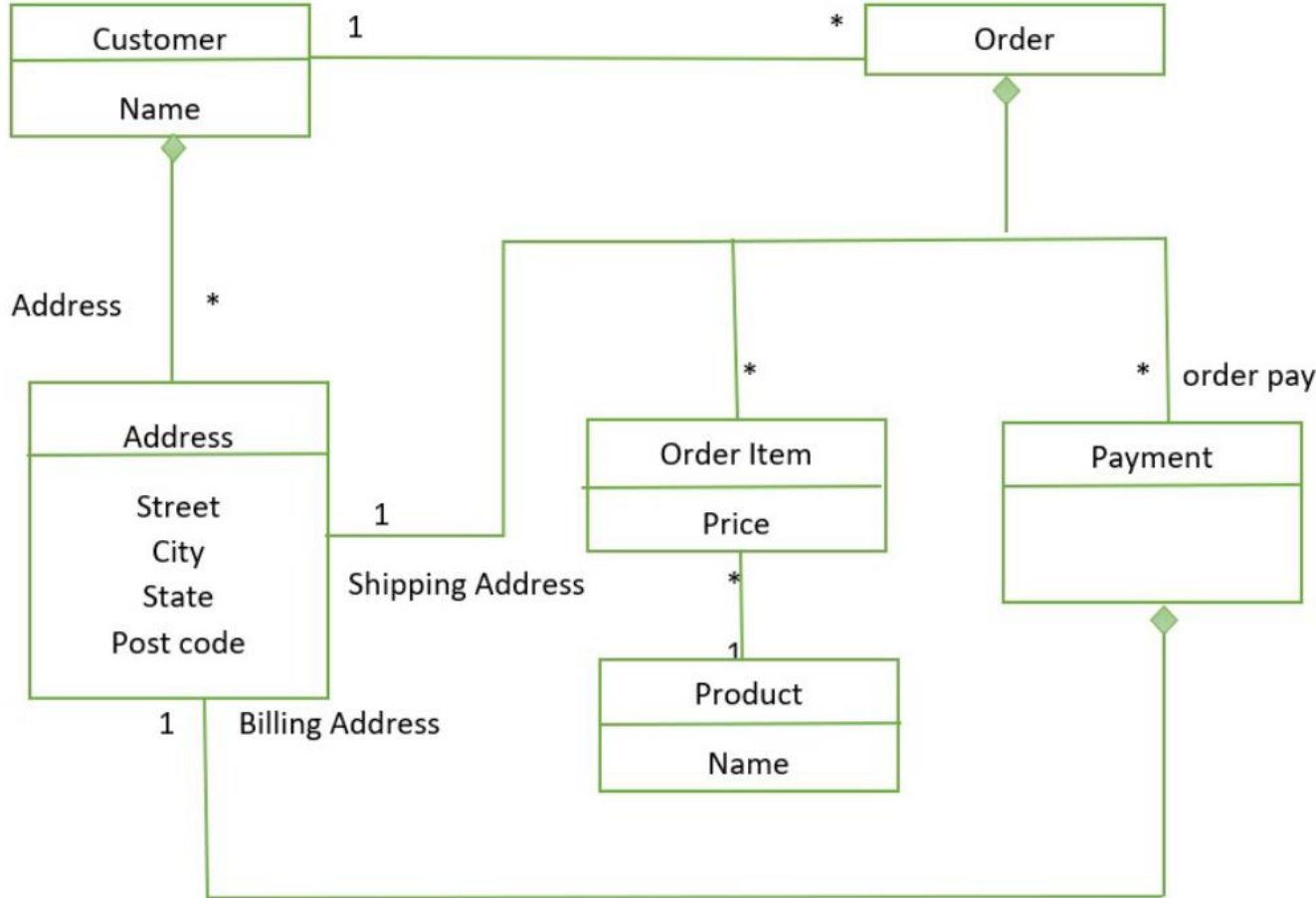
Aggregate and Individual models

- **Aggregate model:** we look for a more distant position. Modeler is more distant. Policy model. This view tends to be more deterministic.
- **Toplam model:** Daha karmaşık sistemlerden bahsedilmektedir. Bir toplam modelde, bir birim olarak diğer bir birimle etkileşimde bulunduğu bir veri koleksiyonudur.
- **Individual model:** modeler is taking a closer look of the individual decisions. This view tends to be more stochastic.
- **Bireysel model:** modelleyici bireysel kararlara daha yakından bakıyor. Bu görüş daha stokastik olma eğilimindedir.

Aggregate (Toplu Yönelim) models

Toplu Yönelimin Sonuçları:

- Toplama mantıksal bir veri özelliği değildir. Tamamen verilerin uygulamalar tarafından nasıl kullanıldığıyla ilgilidir.
- Toplu bir yapı başkaları için engel teşkil edebilir ama bazı veri etkileşimlerine yardımcı olabilir.
- İşlemler açısından önemli bir sonucu vardır.
- NoSQL veritabanları ACID (Atomicity, Consistency, Isolation, Durability) işlemlerini desteklemediğinden tutarlılıktan ödün verirler. Transaction için olarak verilen örnek bir banka hesabından başka bir banka hesabına paranın transfer edilmesi olarak anlatılabilir. Burada 2 hesap gönderici ve alıcının hesabı üzerinde mantıksal bir operasyon gerçekleştiriliyor. Bu işleme Transaction deniyor.
- Toplu veritabanları, tek seferde tek bir toplu verinin atomik olarak işlenmesini destekler.



Usage Notes

- These slides were gathered from the presentations published on the internet. I would like to thank who prepared slides and documents.
- Also, these slides are made publicly available on the web for anyone to use
- If you choose to use them, I ask that you alert me of any mistakes which were made and allow me the option of incorporating such changes (with an acknowledgment) in my set of slides.

Sincerely,
Dr. Cahit Karakuş

`cahitkarakus@esenyurt.edu.tr`

Thank You